Recasages possibles : 201, 203, 209, 228.
Référence : Analyse, Gourdon (p. 304-305)

Développement On va montrer que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Lemme 1 Soient $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ et $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'identité, *i.e* une suite de fonctions de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ positives vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)dt = 1 \quad \text{et} \quad \forall \eta > 0, \int_{|t|\geqslant\eta} \chi_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Alors, $(f * \chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Lemme 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt$ et $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $p_n(t) = \frac{(1-t^2)^n}{a_n}\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$. Alors, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'identité et si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est à support contenu dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f * p_n$ est une fonction polynômiale.

Théorème 3 (Weierstrass) Si $f \in \mathcal{C}([a,b])$, alors f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômiales.

- *Preuve du Lemme 1* : Fixons $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\|f * \chi_n - f\|_\infty \leqslant C\varepsilon$, ou C est une constante indépendante de n. Comme χ_n est d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$ et positive, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left|(f * \chi_n)(x) - f(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\chi_n(t)dt - \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_n(t)dt\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}} \big(f(x-t) - f(x)\big)\chi_n(t)dt\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|f(x-t) - f(x)\right|\chi_n(t)dt.\end{aligned}$$

Notons $[a,b]$ un compact de $\mathbb{R}$ contenant le support de f. Alors, f étant continue sur $[a,b]$, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$. Comme f est nulle sur $\mathbb{R} \setminus [a,b]$, f est en fait uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| < \eta$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Par ailleurs, f étant continue sur le compact $[a,b]$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f| \leqslant M$ sur $[a,b]$, donc sur $\mathbb{R}$ puisque f est à support dans $[a,b]$. On obtient alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|(f*\chi_n)(x) - f(x)\right| = \int_{|t|\geqslant\eta} \left|f(x-t)-f(x)\right|\chi_n(t)dt + \int_{-\eta}^{\eta} \left|f(x-t)-f(x)\right|\chi_n(t)dt.$$

Si $|t| \geqslant \eta$, alors par inégalité triangulaire, on a

$$\left|f(x-t) - f(x)\right| \leqslant \left|f(x-t)\right| + \left|f(x)\right| \leqslant 2M.$$

Par ailleurs si $t \in]-\eta, \eta[$, alors $\left|(x-t)-t\right| = |t| < \eta$, d'où par uniforme continuité de f, $\left|f(x-t)-f(x)\right| \leqslant \varepsilon$. Enfin, comme (χ_n) est une approximation de l'identité, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait $\int_{|t|\geqslant n} \chi_n(t)dt \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, on obtient pour tout $n \geqslant N$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left|(f * \chi_n)(x) - f(x)\right| &\leqslant 2M\int_{|t|\geqslant\eta} \chi_n(t)dt + \varepsilon\int_{-\eta}^{\eta} \chi_n(t)dt \\ &\leqslant 2M\varepsilon + \varepsilon\int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)dt \quad \text{car } \chi_n \geqslant 0 \\ &\leqslant (2M+1)\varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\|f * \chi_n - f\|_\infty \leqslant (2M+1)\varepsilon$, ce qui montre bien la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de $f * \chi_n$ vers f et achève la preuve du **Lemme 1**.

- *Preuve du Lemme 2* : Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. En effet, $\lim\limits_{t\to\pm1} (1-t^2)^n = 0$ donc $\lim\limits_{t\to\pm1} p_n(t) = 0$ et ainsi $p_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. De plus, p_n est clairement à support compact (inclu dans $[-1,1]$) d'où $p_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Vérifions alors que (p_n) est bien une approximation de l'identité. On a pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(t)dt = \int_{-1}^{1} p_n(t)dt = \frac{1}{a_n}\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt = \frac{a_n}{a_n} = 1.$$

Remarquons que, par parité de $t \mapsto (1-t^2)^n$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n dt$. Or, si $t \in]0,1[$, $(1-t^2)^n \geqslant t(1-t^2)^n$, d'où

$$a_n \geqslant \int_0^1 2t(1-t^2)^n dt = \left[\frac{-(1-t^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, si $\eta \in]0,1[$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\int_{|t|\geqslant \eta} p_n(t)dt &= \frac{2}{a_n}\int_\eta^1 \left(1-t^2\right)^n dt \\ &\leqslant \frac{2}{a_n}\int_\eta^1 \left(1-\eta^2\right)^n dt \quad \text{par décroissance de } t\mapsto \left(1-t^2\right)^n \\ &\leqslant 2(n+1)(1-\eta)\left(1-\eta^2\right)^n.\end{aligned}$$

Comme $\eta \in]0,1[$, $|1-\eta^2|<1$ donc $(n+1)\left(1-\eta^2\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, on a bien pour tout $\eta>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{|t|\geqslant\eta} p_n(t)dt = 0$ (le résultat pour $\eta \geqslant 1$ étant trivial). Finalement, (p_n) est bien une approximation de l'unité.

Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ à support contenu dans $I=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f * p_n$ est une fonction polynômiale sur I. Tout d'abord remarquons qu'avec le changement de variable $u = x-t$, on a $\forall x \in I$,

$$f*p_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)p_n(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(u)p_n(x-u)du = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)p_n(x-t)dt.$$

Si $x,t \in I$, alors $|x-t| \leqslant |x|+|t| \leqslant 1$ donc $p_n(x-t) = \frac{\left(1-(x-t)^2\right)^n}{a_n}$. En développant, d'après la formule du binôme de Newton, on obtient que pour tous $x,t\in I$, $p_n(x-t) = \sum\limits_{k=0}^{2n} q_k(t)x^k$, où q_k est polynômiale en t pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$. Ainsi,

$$f*p_n(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\sum_{k=0}^{2n} q_k(t)x^k dt = \sum_{k=0}^{2n}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)q_k(t)dt\right)x^k,$$

et on voit bien que $f*p_n$ est bien polynômiale en x sur I, ce qui conclut la preuve du **Lemme 2**.

- Soient $a<b$ deux réels, et $f\in\mathcal{C}([a,b])$. Quitte à précomposer f par le changement de variable affine

$$\varphi : \left|\begin{array}{rcl} \left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right] & \longrightarrow & [a,b] \\ t & \longmapsto & (b-a)\left(2t+\frac{1}{2}\right)+a, \end{array}\right.$$

on peut se ramener au cas où $[a,b] = \left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$.

On prolonge alors f à $\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right]$ (resp. $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$) par une fonction affine valant 0 en $-\frac{1}{2}$ et $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ en $-\frac{1}{4}$ (resp. $f\left(\frac{1}{4}\right)$ en $\frac{1}{4}$ et 0 en $\frac{1}{2}$) (dessin obligatoire). On prolonge enfin cette fonction à $\mathbb{R}$ tout entier par 0 en dehors de $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. On note $\widetilde{f}$ ce prolongement. Alors, $\widetilde{f}\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est à support dans $I=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, donc d'après les **Lemmes 1** et **2**, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômiales sur I qui converge uniformément vers $\widetilde{f}$ sur I. En particulier, $\left((P_n)_{|\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynômiales sur $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ qui converge uniformément vers f sur $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$, ce qui prouve le **Théorème 3** de Weierstrass.